MATHEMATIQUES (Durée 4 h - Coefficient 4)

Le soin apporté aux calculs à effectuer, ainsi que la rigueur du raisonnement seront des éléments très importants d'appréciation.

PRELIMINAIRE

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \; ; \quad \gamma_n = S_n - \ln(n) \; ; \quad \delta_n = \gamma_n - \ln(1 + \frac{1}{n})$$

(a) Montrer que les suites $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent et ont la même limite qu'on notera γ, avec $\gamma \in]0,1[$.

N.B. : On ne cherchera pas à calculer γ ; pour information, on peut montrer que γ a comme valeur approchée 0,577.

(b) Prouver que : $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{S_n}{\ln(n)}\right] = 1$

PREMIERE PARTIE

I - 1°) Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $E(x) = \max(\mathbb{Z} \cap]-\infty, x])$ la partie entière de x.

Prouver que : $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n.\ln(n)} \cdot \sum_{k=1}^{n} E(\frac{n}{k})\right] = 1$

2°) (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En calculant de deux façons le cardinal de l'ensemble :

$$A_n = \left\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \;/\; 1 \leq p \leq n \; ; \; 1 \leq q \leq n \; ; \; p.q \leq n\right\}$$

montrer que : $\sum_{k=1}^{n} E(\frac{n}{k}) = 2. \sum_{k=1}^{E(\sqrt{n})} E(\frac{n}{k}) - [E(\sqrt{n})]^2$

(b) En déduire qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeant vers 0, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on ait : $\sum_{k=1}^{n} E(\frac{n}{k}) = n.\ln(n) + (2.\gamma - 1).n + n.\varepsilon_n$

(c) En déduire que : $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[E(\frac{2.n}{k}) - 2.E(\frac{n}{k})\right]\right] = 2.\ln(2) - 1$

3°) Montrer l'existence et calculer en fonction de γ : $I = \int_0^1 \left[\frac{1}{t} - E(\frac{1}{t})\right].dt$

DEUXIEME PARTIE

II- 1°) Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,n]$ les inégalités :

$$0 \leq e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n \leq \frac{t^2}{n} . e^{-t}$$

(pour établir la seconde, on pourra étudier sur $[0,\sqrt{n}]$ la fonction auxiliaire $h : t \longmapsto t + n.\ln(1 - \frac{t}{n}) - \ln(1 - \frac{t^2}{n})$

2°) (a) Montrer l'existence de $L = \int_0^\infty e^{-t} . \ln(t). dt$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $L_n = \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n . \ln(t). dt$

En intégrant par parties et en remarquant que $t \longmapsto (1 - \frac{t}{n})^n$ est la dérivée de $t \longmapsto \frac{n}{n+1} . \left[1 - (1 - \frac{t}{n})^{n+1}\right]$,

comparer L_n à γ_n. Utiliser II.1 pour en déduire la valeur de L.

3°) (a) Justifier l'existence des intégrales :

$$M = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt \; ; \quad N = \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad \text{et prouver que } M - N = \gamma$$

(b) Prouver que pour tout $x > 0$ on a :

$$\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt + \ln(x) + \gamma = \int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt$$ puis prouver que :

Tournez la page S. V. P.

$$\lim_{x \to 0^+}\left[\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt + \ln(x)\right] = -\gamma$$

(c) Existence et calcul de : $\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,dt$ pour $a > 0$ et $b > 0$.

En déduire la valeur de : $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,dt$

TROISIEME PARTIE

Soit U l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et telles que $\int_1^{\infty} f(t).dt$ converge ; soit V l'ensemble des applications g de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et telles que $\int_1^{\infty} \frac{g(t)}{t}\,dt$ converge.

III- 1°) Montrer que $U \subset V$. Pour cela, pour $f \in U$ et $x \geqslant 1$, on pourra intégrer par parties dans $\int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt$ en considérant

$F(x) = \int_1^x f(t).dt$. A-t-on $U = V$?

2°) Pour $f \in V$, on considère $\hat{f}$ définie pour $x > 0$ par : $\hat{f}(x) = \int_x^{\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$

(a) Prouver que $\hat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser $(\hat{f})'$.

(b) Déterminer les réels λ tels qu'il existe $f \in V$, non nulle, telle que $\hat{f} = \lambda.f$.

3°) Soit $f \in U$; montrer que $\hat{f}$ est dans U si et seulement si $y \longmapsto y.f(y)$ admet une limite finie en $+\infty$.

4°) Soit $f \in V$ ayant une limite finie à droite en 0 notée $f(0)$, prolongeant f en 0.

(a) On suppose que $f(0) \neq 0$; prouver que $\hat{f}(x)$ est équivalent à $-f(0).\ln(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

En déduire l'existence de $\int_0^1 \hat{f}(t).dt$.

(b) On suppose que $f(0) = 0$ et f dérivable à droite en 0 : c'est-à-dire que $\lim_{t \to 0^+}\left[\frac{f(t)}{t}\right]$ existe et est finie.

Montrer l'existence des intégrales : $\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ et $\int_0^1 \hat{f}(t).dt$

5°) (a) soit $f \in U$ telle que $\lim_{y \to 0^+}\left(\int_y^{\infty} f(t).dt + \ln(y)\right) = 0$

Montrer qu'alors on a : $\int_0^{\infty}\left[f(t) - \frac{e^{-t}}{t}\right].dt = \gamma$

(b) Calculer $\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{1+t} - e^{-t}\right]\frac{dt}{t}$.

(c) Calculer $\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right].e^{-t}.dt$

6°) (a) Soit $f \in V$ ayant une limite finie à droite en 0 notée $f(0)$.

Montrer que $\int_0^{\infty} \frac{f(a.t) - f(b.t)}{t}\,dt$ existe pour $a > 0$ et $b > 0$, et vaut $f(0).\ln(\frac{b}{a})$.

(b) Existence et calcul de $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(2.x)}{x}\,dx$

QUATRIEME PARTIE

IV. 1°) On considère Φ définie par $\Phi(t) = 0$ si $t < 0$ et $\Phi(t) = e^{-t}$ si $t \geqslant 0$. Soit X une variable aléatoire de densité Φ.

On considère la fonction $\hat{\Phi}$ définie par $\hat{\Phi}(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $\hat{\Phi}(x) = \int_x^{\infty} \frac{\Phi(t)}{t}\,dt$ si $x > 0$.

a) Montrer que $\hat{\Phi}$ est une densité d'une certaine variable aléatoire réelle notée $\hat{X}$, (X et $\hat{X}$ étant supposées définies sur (Ω, B, P)).

b) Montrer qu'on a : * $\hat{\Phi}(x)$ équivalent à $-\ln(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

** $\hat{\Phi}(x) \leqslant e^{-x}$ pour $x \geqslant 1$.

c) En déduire que $\hat{X}$ admet des moments à tout ordre, que l'on précisera.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail